



GLOBAL JOURNAL OF SCIENCE FRONTIER RESEARCH: F  
MATHEMATICS AND DECISION SCIENCES  
Volume 14 Issue 1 Version 1.0 Year 2014  
Type : Double Blind Peer Reviewed International Research Journal  
Publisher: Global Journals Inc. (USA)  
Online ISSN: 2249-4626 & Print ISSN: 0975-5896

## Computation of a Summation Formula

By Salahuddin, M. P. Chaudhary & Vinesh Kumar

*Jawaharlal Nehru University, India*

**Abstract** - The main aim of the present paper is to compute a summation formula involving recurrence relation of Gamma function.

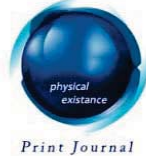
**Keywords:** *contiguous function, recurrence relation, bailey summation theorem and legendre duplication formula.*

**GJSFR-F Classification :** *MSC 2010: 40A25, 65B10*



*Strictly as per the compliance and regulations of :*





# Computation of a Summation Formula

Salahuddin <sup>α</sup>, M. P. Chaudhary <sup>σ</sup> & Vinesh Kumar <sup>ρ</sup>

**Abstract-** The main aim of the present paper is to compute a summation formula involving recurrence relation of Gamma function.

**Keywords :** contiguous function, recurrence relation, bailey summation theorem and legendre duplication formula.

## I. INTRODUCTION

Generalized Gaussian hypergeometric function of one variable is defined by

$${}_A F_B \left[ \begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_A ; \\ b_1, b_2, \dots, b_B ; \end{matrix} z \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k (a_2)_k \dots (a_A)_k z^k}{(b_1)_k (b_2)_k \dots (b_B)_k k!} \quad (1)$$

where the parameters  $b_1, b_2, \dots, b_B$  are neither zero nor negative integers and  $A, B$  are non-negative integers.

Contiguous Relation[E. D. p.51(10), Andrews p.363(9.16)] is defined as follows

$$(a-b) {}_2 F_1 \left[ \begin{matrix} a, b ; \\ c ; \end{matrix} z \right] = a {}_2 F_1 \left[ \begin{matrix} a+1, b ; \\ c ; \end{matrix} z \right] - b {}_2 F_1 \left[ \begin{matrix} a, b+1 ; \\ c ; \end{matrix} z \right] \quad (2)$$

Recurrence relation of gamma function is defined as follows

$$\Gamma(z+1) = z \Gamma(z) \quad (3)$$

Legendre duplication formula[Bells & Wong p.26(2.3.1)] is defined as follows

$$\sqrt{\pi} \Gamma(2z) = 2^{(2z-1)} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) \quad (4)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} = \frac{2^{(b-1)} \Gamma\left(\frac{b}{2}\right) \Gamma\left(\frac{b+1}{2}\right)}{\Gamma(b)} \quad (5)$$

$$= \frac{2^{(a-1)} \Gamma\left(\frac{a}{2}\right) \Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}{\Gamma(a)} \quad (6)$$

Author  $\alpha$ : P.D.M College of Engineering, Bahadurgarh, Haryana, India e-mails: sludn@yahoo.com, vsludn@gmail.com

Author  $\sigma$ : International Scientific Research and Welfare Organization, New Delhi, India. e-mail: mpchaudhary2000@yahoo.com

Author  $\rho$ : Jawaharlal Nehru University, New Delhi, India

Bailey summation theorem [Prud, p.491(7.3.7.8)] is defined as follows

$${}_2F_1 \left[ \begin{matrix} a, 1-a & ; & 1 \\ c & ; & 2 \end{matrix} \right] = \frac{\Gamma(\frac{c}{2}) \Gamma(\frac{c+1}{2})}{\Gamma(\frac{c+a}{2}) \Gamma(\frac{c+1-a}{2})} = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(c)}{2^{c-1} \Gamma(\frac{c+a}{2}) \Gamma(\frac{c+1-a}{2})} \quad (7)$$

II. MAIN RESULT OF SUMMATION FORMULA

$$\begin{aligned}
 & {}_2F_1 \left[ \begin{matrix} a, -a-57 & ; & 1 \\ c & ; & 2 \end{matrix} \right] \\
 = & \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(c)}{2^{c+57}} \left[ \frac{1}{\Gamma(\frac{c-a}{2}) \Gamma(\frac{c+a+57}{2})} \left\{ \begin{aligned}
 & 4663993231426051494968193237484327403520000000 \\
 & -9073290164577758977892122586870705081548800000a \\
 & +6014608599484707275800601864484573501849600000a^2 \\
 & -1888036219179493312589613630382918642827264000a^3 \\
 & +305882190592324772863078478896813270974873600a^4 \\
 & -23503014146793886208180982364121333912309760a^5 \\
 & +278791118679540135744865231405769654424576a^6 \\
 & +69224845183875522946832415354508697535744a^7 \\
 & -2535712248376814335343977751564501745792a^8 \\
 & -108549944997731834507186371483101954240a^9 \\
 & +4557554083806613399443726191766521440a^{10} \\
 & +145589201260019100940545911010809520a^{11} - 3685340640053462238648671778586680a^{12} \\
 & -148455131024117581464577195085940a^{13} + 703789848420398412314305604430a^{14} \\
 & +81662738285843613292539805380a^{15} + 737178620075422201572806790a^{16} \\
 & -15453205296485440868797140a^{17} - 356486644733827756383690a^{18} \\
 & -1336655811521431100700a^{19} + 32941890966055701630a^{20} + 445343405624977860a^{21} \\
 & +1502906526285450a^{22} - 10300901787540a^{23} - 110701049550a^{24} - 342030780a^{25} \\
 & -52206a^{26} + 1596a^{27} + 2a^{28} + 12349712285441871032901059162511984348364800000c \\
 & -18399167583909244001629621522703942984663040000ac \\
 & +9883327676707633486355970893424545281081344000a^2c \\
 & -2548019215741280662436272161528151588995072000a^3c \\
 & +332869371755995806063997895249079236528701440a^4c \\
 & -18533489916374313009459094330204275566641152a^5c \\
 & -219977757420867232822000000994805006483456a^6c \\
 & +63650708636640391991306830993440111144960a^7c
 \end{aligned} \right. \right]
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& -786946959907484168061439374690130247680a^8c \\
& -105333354550439270320203019772149281792a^9c \\
& +1272103784350987562244170485487243264a^{10}c \\
& +118535841449585106927547371397966080a^{11}c \\
& -247233008505961828377294660520960a^{12}c - 81689240943219624269790590830272a^{13}c \\
& -754883858724479220655956538816a^{14}c + 24750765341360435154969609600a^{15}c \\
& +531219767676732770129836160a^{16}c + 106672931409531813213888a^{17}c \\
& -97230321230337925005376a^{18}c - 1019279993673478817280a^{19}c + 259106548835214080a^{20}c \\
& +76009425920395968a^{21}c + 539477067007424a^{22}c + 781695008640a^{23}c - 7135623040a^{24}c \\
& -34856640a^{25}c - 47040a^{26}c + 13494135444075880964110548638532103003176960000c^2 \\
& -16257576015192941245160018517482974337826816000ac^2 \\
& +7233995424521593529602977282580412697201868800a^2c^2 \\
& -1543355849118250807798527942099714455607705600a^3c^2 \\
& +161277491380084838730576831057220479059066880a^4c^2 \\
& -5917455011702141973783995493819270785605632a^5c^2 \\
& -264723867823483210789400382086327189157888a^6c^2 \\
& +23096692644806495806556920822512910871040a^7c^2 \\
& +166586817890952004341389353500124223488a^8c^2 \\
& -36134051997281413873556906633031177600a^9c^2 \\
& -212949336348315839241353521493266944a^{10}c^2 \\
& +32264763151661319017833449716797920a^{11}c^2 \\
& +404334941759226115989270314857856a^{12}c^2 - 14218553787878722298709743501928a^{13}c^2 \\
& -328225254933201367131430008200a^{14}c^2 + 1143229647253660219786188240a^{15}c^2 \\
& +9736761500480030377690430a^{16}c^2 + 820106715230945721379944a^{17}c^2 \\
& -5911924582527365744056a^{18}c^2 - 141960880118220820800a^{19}c^2 - 725001102026815328a^{20}c^2 \\
& +2211323321863656a^{21}c^2 + 38291954101128a^{22}c^2 + 138885037200a^{23}c^2 + 55218800a^{24}c^2 \\
& -622440a^{25}c^2 - 840a^{26}c^2 + 8503508418886169448888178254733450433003520000c^3 \\
& -8515296832751290559466335704757694266710425600ac^3 \\
& +3176567663094301371561153309912365816768102400a^2c^3 \\
& -561918804935876961195354695777965295750086656a^3c^3 \\
& +46189958201951932823079728295118858792992768a^4c^3 \\
& -869322064993772452952491622404221024337920a^5c^3 \\
& -102991028046491082289579737359791411036160a^6c^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +4332207037492464545904351830174877745152a^7c^3 \\
& +125982068284420711603185003071050842112a^8c^3 \\
& -6045163799865803639622483060427161600a^9c^3 \\
& -140275929158998727700833437257850880a^{10}c^3 \\
& +3882856168239761927883033010888704a^{11}c^3 + 116812278024072710451296861554688a^{12}c^3 \\
& -682475133954918414072511610880a^{13}c^3 - 49019782795360217251135262720a^{14}c^3 \\
& -330492273500001618768322560a^{15}c^3 + 6714367719278375671330816a^{16}c^3 \\
& +116581044196640285982720a^{17}c^3 + 302885286468449484800a^{18}c^3 \\
& -6826246208006184960a^{19}c^3 - 65078503959332864a^{20}c^3 - 143929851985920a^{21}c^3 \\
& +745317314560a^{22}c^3 + 4461649920a^{23}c^3 + 6522880a^{24}c^3 \\
& +3561261065507197629301363276799707812200448000c^4 \\
& -3010245394488795638590287560253158832985866240ac^4 \\
& +947399864953188793058206727349547698216763392a^2c^4 \\
& -138618021601763633900282415668783181747191808a^3c^4 \\
& +8705958157821068935221924991437973346451456a^4c^4 \\
& -6545532381448157843612246039082886594560a^5c^4 \\
& -22334908585405693095747598370064318783488a^6c^4 \\
& +413859977284095480091170554515104030720a^7c^4 \\
& +29254233942802110742901053487829485568a^8c^4 \\
& -485011692124391703971622583455590400a^9c^4 \\
& -26684292126084283167340789915585024a^{10}c^4 \\
& +139246104363744831556092713906688a^{11}c^4 + 14601002459767951505475582032768a^{12}c^4 \\
& +85933698958471849931140531200a^{13}c^4 - 3407619360710347219130453760a^{14}c^4 \\
& -52591205727410294231738880a^{15}c^4 + 54695691465192056749184a^{16}c^4 \\
& +6704288546893480857600a^{17}c^4 + 48990032197516467200a^{18}c^4 - 42781401116213760a^{19}c^4 \\
& -2102705477448576a^{20}c^4 - 9072154291200a^{21}c^4 - 5764944640a^{22}c^4 + 39836160a^{23}c^4 \\
& +58240a^{24}c^4 + 1072222813971144348944661206228083295146475520c^5 \\
& -771955970780867938711218378135730636858589184ac^5 \\
& +205497257561337377900462770972553886277042176a^2c^5 \\
& -24708803793159510844090828036989490393251840a^3c^5 \\
& +1127019567699989225382988912166933071134720a^4c^5 \\
& +22387691467933408312897780423470011645952a^5c^5 \\
& -3112100533321908254934145983627669012480a^6c^5 \\
& +5124628293853339619904189458261606400a^7c^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +3829773132020314532300280189521756160a^8c^5 \\
& -933508745701830528533431891918848a^9c^5 \\
& -2743566111413385672154074653147136a^{10}c^5 - 19247072311498272636067394641920a^{11}c^5 \\
& +970964177802757606050320424960a^{12}c^5 + 15032825475370109826676088832a^{13}c^5 \\
& -85768382005633298871803904a^{14}c^5 - 3384247255338239724994560a^{15}c^5 \\
& -18375409016677836963840a^{16}c^5 + 156077581075549765632a^{17}c^5 \\
& +2192963360706134016a^{18}c^5 + 6668787980574720a^{19}c^5 - 21590080512000a^{20}c^5 \\
& -166865707008a^{21}c^5 - 266133504a^{22}c^5 \\
& +243890488149341637300824039218934163569639424c^6 \\
& -150321771497018843749746565721892434107957248ac^6 \\
& +33839101509315467383343065030221994527817728a^2c^6 \\
& -3307414859224703274338630570242969782190080a^3c^6 \\
& +99329120549956957396045675400627113951232a^4c^6 \\
& +4887206737133741709404961469245710008320a^5c^6 \\
& -292954507636483690726773143905519042560a^6c^6 \\
& -4025881344973482804545093699908976640a^7c^6 \\
& +316621333331420393869780615398096896a^8c^6 \\
& +3984040841614292103838617498894336a^9c^6 - 166306661074386710952004844480512a^{10}c^6 \\
& -3038507371758994979751178951680a^{11}c^6 + 30278304609796953429224494080a^{12}c^6 \\
& +1031766521753165323963149312a^{13}c^6 + 3470841044718249605731328a^{14}c^6 \\
& -108558108968035386316800a^{15}c^6 - 1157796012019705051136a^{16}c^6 \\
& -901101796452329472a^{17}c^6 + 43219410012979200a^{18}c^6 + 226584758400000a^{19}c^6 \\
& +199364092928a^{20}c^6 - 993248256a^{21}c^6 - 1584128a^{22}c^6 \\
& +43355389491055769847463879254244627518062592c^7 \\
& -22932332314025228643707793270129164078284800ac^7 \\
& +4354351621061894603205398821295755488133120a^2c^7 \\
& -340280278205918007749476681007943439613952a^3c^7 \\
& +5268826680927529460010835301966427455488a^4c^7 \\
& +607087424002840331349343636652194529280a^5c^7 \\
& -18437303301372552264659488449434746880a^6c^7 \\
& -603661151100359177840858346740514816a^7c^7 \\
& +16429189593277264282920436663320576a^8c^7 + 458939103196979469552427872092160a^9c^7 \\
& -5237422369426935938151121059840a^{10}c^7 - 207974579190169053766694141952a^{11}c^7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -296405190586920108836093952a^{12}c^7 + 38723174283616217992396800a^{13}c^7 \\
& + 354068653936202771005440a^{14}c^7 - 1229871189063139983360a^{15}c^7 \\
& - 32292563516970172416a^{16}c^7 - 130278255330263040a^{17}c^7 + 262376459304960a^{18}c^7 \\
& + 2860554977280a^{19}c^7 + 5018517504a^{20}c^7 \\
& + 6171290629603643126170580214228889934757888c^8 \\
& - 2802629659556658619881783593724180336476160ac^8 \\
& + 446762298233352858329171137594640971071488a^2c^8 \\
& - 27234105005962376769265869372381816422400a^3c^8 \\
& + 34005593641616561522098963684291510272a^4c^8 \\
& + 52024380602683954033731680390240501760a^5c^8 \\
& - 673739124242171592292621127316193280a^6c^8 \\
& - 49625299280098543277519119704047616a^7c^8 + 427094431749423840936631304773632a^8c^8 \\
& + 28966115302685253557341551360000a^9c^8 + 17932140456528884843713876992a^{10}c^8 \\
& - 8394161385978078190463453184a^{11}c^8 - 69785672710363246659449856a^{12}c^8 \\
& + 744918949016407969689600a^{13}c^8 + 12861312108952905861120a^{14}c^8 \\
& + 29989104310096588800a^{15}c^8 - 435016831929698304a^{16}c^8 - 2864322226022400a^{17}c^8 \\
& - 3278428707840a^{18}c^8 + 12770334720a^{19}c^8 + 22404096a^{20}c^8 \\
& + 716136359002421753334636316504433990041600c^9 \\
& - 278927665676587737338789279445144305664000ac^9 \\
& + 37070372176984097349474493611626385637376a^2c^9 \\
& - 1696926592070759457997617833086770216960a^3c^9 \\
& - 23453509224301325867233427545925877760a^4c^9 \\
& + 3259768163222589195235110000391618560a^5c^9 \\
& + 3259768163222589195235110000391618560a^5c^9 - 406186249061206132900695113203712a^6c^9 \\
& - 2729628530242733424233244937420800a^7c^9 - 7089741271975303163177293578240a^8c^9 \\
& + 1174373949670553060404796620800a^9c^9 + 10111389834351011106294890496a^{10}c^9 \\
& - 199478333790058458479984640a^{11}c^9 - 3134893884117907735183360a^{12}c^9 \\
& + 981384285718052536320a^{13}c^9 + 249222060888817336320a^{14}c^9 \\
& + 1331407173441945600a^{15}c^9 - 1469053900554240a^{16}c^9 - 27175272284160a^{17}c^9 \\
& - 52973240320a^{18}c^9 + 68671834987125330030421072486570267770880c^{10} \\
& - 22882708575763566744543275240786849955840ac^{10} \\
& + 2511663177351930865843795854161162010624a^2c^{10} \\
& - 81036432418679722583828635815766917120a^3c^{10}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& -2606010011827642918441988956573663232a^4c^{10} \\
& +151675625085089343325830323308265472a^5c^{10} \\
& +1696721845213480414689970160336896a^6c^{10} \\
& -104663464419698498656675978444800a^7c^{10} - 1226537509620043280063155175424a^8c^{10} \\
& +30480845647972909412775112704a^9c^{10} + 513919518846713652406136832a^{10}c^{10} \\
& -1935632471862432878346240a^{11}c^{10} - 76828748499389047422976a^{12}c^{10} \\
& -314383187993679028224a^{13}c^{10} + 2406525855763341312a^{14}c^{10} + 20987721597173760a^{15}c^{10} \\
& +30351396421632a^{16}c^{10} - 97054543872a^{17}c^{10} - 189190144a^{18}c^{10} \\
& +5497635147596192782359823742199807344640c^{11} \\
& -1561382656611557490409360890779821670400ac^{11} \\
& +139776823488644702604807441395660881920a^2c^{11} \\
& -2812542121252118149855351183169814528a^3c^{11} \\
& -171641327808813782638871520208748544a^4c^{11} \\
& +5149700372373416450676088425676800a^5c^{11} \\
& +122331755997391581507162073989120a^6c^{11} - 2713864686690451131253552840704a^7c^{11} \\
& -60745021571699617498179305472a^8c^{11} + 415445612517627736086282240a^9c^{11} \\
& +14624775143761555693240320a^{10}c^{11} + 37100204878937028820992a^{11}c^{11} \\
& -1096071224208325607424a^{12}c^{11} - 7955496728726077440a^{13}c^{11} + 2592182910320640a^{14}c^{11} \\
& +158110675107840a^{15}c^{11} + 346733936640a^{16}c^{11} \\
& +370280998566765020991674964489126543360c^{12} \\
& -89184394142031575767273273726945198080ac^{12} \\
& +6404360415447396665252022066016681984a^2c^{12} \\
& -57931705474008623210790770045878272a^3c^{12} \\
& -8135731094395636052832874936401920a^4c^{12} \\
& +117358578660093549301123991470080a^5c^{12} + 5226128750325301780808687812608a^6c^{12} \\
& -39352638321024742523943124992a^7c^{12} - 1842369256216054559514673152a^8c^{12} \\
& -1956512728893023492505600a^9c^{12} + 261744719713921596325888a^{10}c^{12} \\
& +1695017345841063788544a^{11}c^{12} - 7558979539619708928a^{12}c^{12} \\
& -95986355680051200a^{13}c^{12} - 173511440793600a^{14}c^{12} + 470567485440a^{15}c^{12} \\
& +1031946240a^{16}c^{12} + 21100243617267630080507066093823590400c^{13} \\
& -4282590123912327053620539705073336320ac^{13} \\
& +241243015910053286321986048595329024a^2c^{13} \\
& +317392344731618976203762659491840a^3c^{13} - 292918390869245011485391679651840a^4c^{13}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& +1145732892161591869492974059520a^5c^{13} + 155820033424534888855468244992a^6c^{13} \\
& +126062959077358580520714240a^7c^{13} - 37586591854992814138982400a^8c^{13} \\
& -227483303554457870008320a^9c^{13} + 2811309253983410847744a^{10}c^{13} \\
& +29506358779073003520a^{11}c^{13} + 12675383600087040a^{12}c^{13} - 595955621560320a^{13}c^{13} \\
& -1493623111680a^{14}c^{13} + 1021211891165813781752728290318090240c^{14} \\
& -173297026100886417422779234123776000ac^{14} \\
& +7423534831050524634811927453761536a^2c^{14} + 85028856086488930301151019008000a^3c^{14} \\
& -8138561013982787524540382576640a^4c^{14} - 33817863753060452180243251200a^5c^{14} \\
& +3356324308027556616644067328a^6c^{14} + 22655202063533428683571200a^7c^{14} \\
& -508961813714509096550400a^8c^{14} - 5307765096818371461120a^9c^{14} \\
& +12505793085327015936a^{10}c^{14} + 285047702205235200a^{11}c^{14} + 645716386775040a^{12}c^{14} \\
& -1520294952960a^{13}c^{14} - 3810263040a^{14}c^{14} + 42072255717618339333719752987115520c^{15} \\
& -5912635830876391885353527122329600ac^{15} + 184011430001246598125992489779200a^2c^{15} \\
& +4089204576532065294692433002496a^3c^{15} - 173636174358710696859330936832a^4c^{15} \\
& -1941669908253312615217889280a^5c^{15} + 51429915147772080517283840a^6c^{15} \\
& +622310622589700567728128a^7c^{15} - 4000985207569851088896a^8c^{15} \\
& -69793100690746245120a^9c^{15} - 88304989860003840a^{10}c^{15} + 1498402705637376a^{11}c^{15} \\
& +4381294460928a^{12}c^{15} + 1476554274182984272218838196551680c^{16} \\
& -169868923301578108950033098342400ac^{16} + 3568900932399156837419266867200a^2c^{16} \\
& +126768410949664960828136226816a^3c^{16} - 2765896222956318792434057216a^4c^{16} \\
& -51423387034574054522880000a^5c^{16} + 517128526311411192037376a^6c^{16} \\
& +10012552612767620923392a^7c^{16} - 5485653566916526080a^8c^{16} - 557859563864064000a^9c^{16} \\
& -1607886168784896a^{10}c^{16} + 3344648896512a^{11}c^{16} + 9779675136a^{12}c^{16} \\
& +44110245621889122921426714624000c^{17} - 4095998640540586676771094528000ac^{17} \\
& +50586979392030133489659543552a^2c^{17} + 2895499458971099845110005760a^3c^{17} \\
& -30409297354552693217034240a^4c^{17} - 903537133713942254714880a^5c^{17} \\
& +2369578977058111881216a^6c^{17} + 105209244209633034240a^7c^{17} + 244781632916029440a^8c^{17} \\
& -2534063399239680a^9c^{17} - 8891450523648a^{10}c^{17} + 1118994148123491144793073909760c^{18} \\
& -82430418273727153657746554880ac^{18} + 413191190264441749570060288a^2c^{18} \\
& +50493990960957170437324800a^3c^{18} - 169285744033286208880640a^4c^{18} \\
& -11202779747419194654720a^5c^{18} - 16774719107706126336a^6c^{18} + 713308679464550400a^7c^{18} \\
& +2698661084528640a^8c^{18} - 5027903569920a^9c^{18} - 17641766912a^{10}c^{18} \\
& +24004195848546383983993159680c^{19} - 1372881198774176650258022400ac^{19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -1535229549819440912138240a^2c^{19} + 675445575549134611415040a^3c^{19} \\
& +977888288505415598080a^4c^{19} - 97677918872587468800a^5c^{19} - 382005832696463360a^6c^{19} \\
& +2845264167567360a^7c^{19} + 12479228805120a^8c^{19} + 432663577898625869461585920c^{20} \\
& -18694574765226612353925120ac^{20} - 114853179343061766897664a^2c^{20} \\
& +6839779658949527076864a^3c^{20} + 32243001718512549888a^4c^{20} - 572761838589050880a^5c^{20} \\
& -3011609316294656a^6c^{20} + 5080828870656a^7c^{20} + 22284337152a^8c^{20} \\
& +6493318159017051999436800c^{21} - 204546451808367799173120ac^{21} \\
& -2076938877274748354560a^2c^{21} + 50837418792085094400a^3c^{21} + 349406521563545600a^4c^{21} \\
& -2032331548262400a^5c^{21} - 11884979814400a^6c^{21} + 80114118503930391429120c^{22} \\
& -1753523695458598256640ac^{22} - 23198555938561720320a^2c^{22} + 261866139942912000a^3c^{22} \\
& +2140357525504000a^4c^{22} - 3299239526400a^5c^{22} - 19293798400a^6c^{22} \\
& +798215672745752002560c^{23} - 11337550315860787200ac^{23} - 175094783960678400a^2c^{23} \\
& +835424826163200a^3c^{23} + 7328287948800a^4c^{23} + 6259840420927242240c^{24} \\
& -51959197335552000ac^{24} - 876133901926400a^2c^{24} + 1243191705600a^3c^{24} \\
& +10905190400a^4c^{24} + 37180801737031680c^{25} - 150376468709376ac^{25} - 2638183661568a^2c^{25} \\
& +157141042200576c^{26} - 206561083392ac^{26} - 3623878656a^2c^{26} + 420906795008c^{27} + 536870912c^{28} \} \\
& +837552258934621203905452191174023520a^{11} - 141270168289011067377045582877148880a^{12} \\
& -2021845356765428409654773282119080a^{13} + 8373639638433210544848776469060a^{14} \\
& +2238231712979988013322503297080a^{15} - 9990799722552224799091706460a^{16} \\
& -956791010584687537587935880a^{17} - 9622102991569333817866860a^{18} \\
& +91183745535600965247000a^{19} + 2694991378838118540180a^{20} + 17680142227039011720a^{21} \\
& -77419018063607220a^{22} - 1844216166887640a^{23} - 10136750250900a^{24} - 6696831960a^{25} \\
& +157168284a^2c^6 + 647976a^2c^7 + 812a^2c^8 + 21969520562926750625769039772789971615744000000c \\
& -70455822097427141799160248482942198486138880000ac \\
& +57986056640905171422632284931380541245685760000a^2c \\
& -20787412783749576213887121000725743133078323200a^3c \\
& +3712575069664523041064042609152834889963888640a^4c \\
& -312335355150989769289748433026823949446346752a^5c \\
& +5177023115455607373919400529925384716621312a^6c \\
& +895006890831413379848615510354466997693824a^7c \\
& -37381766993452100157598246005743416891200a^8c \\
& -1402689952549802870466457516845851463072a^9c \\
& +66936787013755696900858600776599339120a^{10}c \\
& +1956103305212164515056776674035946216a^{11}c - 55293581297084350538063748337832876a^{12}c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2083316898092694304203911421182022a^{13}c + 11768243926975392724462344998695a^{14}c \\
& + 1178230555342833729585631608066a^{15}c + 10218874688324348216615363599a^{16}c \\
& - 227989941300486079532373582a^{17}c - 5140151472777200700238925a^{18}c \\
& - 18695659349061936746934a^{19}c + 481147358429282747059a^{20}c + 6446729951856043278a^{21}c \\
& + 21607027877432725a^{22}c - 150034084041114a^{23}c - 1605431715251a^{24}c - 4956437850a^{25}c \\
& - 752927a^{26}c + 23142a^{27}c + 29a^{28}c + 43139032447351017510868169359754611528826880000c^2 \\
& - 83143829797965396330113455873789432071979008000ac^2 \\
& + 51793764842040309292230678479220909891964108800a^2c^2 \\
& - 14792645989820833965953860378854976249606963200a^3c^2 \\
& + 2097084514361647796550237688138573002013999104a^4c^2 \\
& - 127730203597139988988913994704114723916398592a^5c^2 \\
& - 899419858647540764674277598821708479746048a^6c^2 \\
& + 430189561288423560703315712980668525419520a^7c^2 \\
& - 6555182824343309950996560884891597754368a^8c^2 \\
& - 719888910790141183992017167821599136000a^9c^2 \\
& + 10193738795798674642143609212846693376a^{10}c^2 \\
& + 830924017317370088202898962506721600a^{11}c^2 - 2622882369415839936982955260852480a^{12}c^2 \\
& - 587047647239454765951943802800368a^{13}c^2 - 5118991853591789446479691041200a^{14}c^2 \\
& + 181781960397411567463149166560a^{15}c^2 + 3802355717459842607816807328a^{16}c^2 \\
& - 69183760293692391883536a^{17}c^2 - 707078669302295745831376a^{18}c^2 \\
& - 7340177069764582243200a^{19}c^2 + 2349976024594534336a^{20}c^2 + 552109006538225136a^{21}c^2 \\
& + 3905800683181488a^{22}c^2 + 5634941850720a^{23}c^2 - 51780557920a^{24}c^2 - 252710640a^{25}c^2 \\
& - 341040a^{26}c^2 + 37932635782998989661984392630993271222435840000c^3 \\
& - 54045241668658053303130668761965584450374860800ac^3 \\
& + 26866219340665671317855817250904463869670850560a^2c^3 \\
& - 6226186922754679115796278878919792179432390656a^3c^3 \\
& + 698699519454286850072740325134681279308447744a^4c^3 \\
& - 28382525500158607788219888250890824970104832a^5c^3 \\
& - 1073368610597303462333782393054181612209152a^6c^3 \\
& + 107506881293715072453913957496600361929472a^7c^3 \\
& + 533003509429799755452441327863529405440a^8c^3 \\
& - 169830408857608894053850378941161762112a^9c^3 \\
& - 776936319683713162962262903573218560a^{10}c^3 + 154499180085475575071327946036339984a^{11}c^3 \\
& + 1814180744364596991609540755925696a^{12}c^3 - 69518943692178626551519233440844a^{13}c^3 \\
& - 1553366879870044980110829451196a^{14}c^3 + 6030312781884889180813180440a^{15}c^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +470042329036527199687955272a^{16}c^3 + 3899011085768023912944972a^{17}c^3 \\
& -29046409548810679611300a^{18}c^3 - 685723036794180459360a^{19}c^3 \\
& -3483839099504967632a^{20}c^3 + 10775726608923276a^{21}c^3 + 185133452357308a^{22}c^3 \\
& +670892596920a^{23}c^3 + 266327880a^{24}c^3 - 3008460a^{25}c^3 - 4060a^{26}c^3 \\
& +20140506281711585092274569936754369963753472000c^4 \\
& -22780130085276130810328992611557701973421588480ac^4 \\
& +9273805481403358576517849794863402047602950144a^2c^4 \\
& -175778987671554678989217599509552386511208448a^3c^4 \\
& +154142100175124049142725226804267273258008576a^4c^4 \\
& -3387305071917140442684291171907473637048320a^5c^4 \\
& -336828780892989232519523609294423783063552a^6c^4 \\
& +15607799363985381728771606808466827755520a^7c^4 \\
& +411384199348144522422927805520418091008a^8c^4 \\
& -21875791616848895850889138943738695680a^9c^4 \\
& -475663389638436044296298213794388992a^{10}c^4 + 14295698423115401405345408174896128a^{11}c^4 \\
& +411695877947970183695399604647168a^{12}c^4 - 2653326748508621493374981591040a^{13}c^4 \\
& -176639492881130251239431324160a^{14}c^4 - 1157214920058986824345390080a^{15}c^4 \\
& +24559707847899700692280064a^{16}c^4 + 420712646431742022758400a^{17}c^4 \\
& +1071476414857263134720a^{18}c^4 - 24825554323428418560a^{19}c^4 - 235648399575004416a^{20}c^4 \\
& -519729419489280a^{21}c^4 + 2704991045120a^{22}c^4 + 16173480960a^{23}c^4 + 23645440a^{24}c^4 \\
& +7318414689134299284552336599179067657080012800c^5 \\
& -6796022756120630120646217665866567861586100224ac^5 \\
& +2296934121931367748435555823642842368034471936a^2c^5 \\
& -356542595503161787886614548711069916217475072a^3c^5 \\
& +23812473609165156745542494957897989579407360a^4c^5 \\
& -85053021306692855315876573527798517219328a^5c^5 \\
& -60588682676595614836897015497705631313920a^6c^5 \\
& +1253961652736781464863798406409876295680a^7c^5 \\
& +80287809559598866803367642180485735424a^8c^5 \\
& -1461585867577404105706482685169875968a^9c^5 - 74971760643874388116118674215357696a^{10}c^5 \\
& +447078613327349750180717077884672a^{11}c^5 + 41897329664118986929620103840192a^{12}c^5 \\
& +234317962533470086974279263232a^{13}c^5 - 9931207111816028739283506560a^{14}c^5 \\
& -150937581923880849384857856a^{15}c^5 + 175364309555434669420608a^{16}c^5 \\
& +19455231502499476349952a^{17}c^5 + 141444101521211906560a^{18}c^5 - 127350332457444096a^{19}c^5 \\
& -6100734541533632a^{20}c^5 - 26294845344768a^{21}c^5 - 16695369600a^{22}c^5 + 115524864a^{23}c^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +168896a^{24}c^5 + 1951011092316213314772126280542273980923379712c^6 \\
& -1514793359398616370648133563534610226938380288ac^6 \\
& +428000832053981857784820659957344663291035648a^2c^6 \\
& -54193026086173415669805497748171224021729280a^3c^6 \\
& +2631442170650665840963636676242487150379008a^4c^6 \\
& +44288448864437812917034668726329266667520a^5c^6 \\
& -7209267175783381613164375720741403688960a^6c^6 \\
& +22213048508393431575140460054314188800a^7c^6 \\
& +8976449623248376950069290718160289792a^8c^6 - 9853511434467465699153847337385984a^9c^6 \\
& -6540272242323363216880245501202432a^{10}c^6 - 43023927697210750521088677980160a^{11}c^6 \\
& +2351067289249207278626740770816a^{12}c^6 + 35674413751511215761480271872a^{13}c^6 \\
& -213227841099530651096614912a^{14}c^6 - 8157603280419159473786880a^{15}c^6 \\
& -43861165248177279242240a^{16}c^6 + 379387499812390637568a^{17}c^6 + 5295215392439132160a^{18}c^6 \\
& +16067846564689920a^{19}c^6 - 52260924491776a^{20}c^6 - 403258791936a^{21}c^6 - 643155968a^{22}c^6 \\
& +398836218240295813151513685889423815670235136c^7 \\
& -261598756782465716652319275581488086990716928ac^7 \\
& +61950036235078071656550762302203122860163072a^2c^7 \\
& -6340830003337838595437496153393116696543232a^3c^7 \\
& +204589278612368334019528752216550821068800a^4c^7 \\
& +9148151826252336515812759158024761966592a^5c^7 \\
& -593478869594852922835510615964528361472a^6c^7 \\
& -7401037505270888127692646867896180736a^7c^7 + 647357508742686097329835635939033088a^8c^7 \\
& +7698837327365830557964184831778816a^9c^7 - 344735470635176634694772736443392a^{10}c^7 \\
& -6132161571762951490799604460032a^{11}c^7 + 64052960090957894517833688576a^{12}c^7 \\
& +2122765337190694626464027136a^{13}c^7 + 6941436287602178840411648a^{14}c^7 \\
& -225445898748710521390080a^{15}c^7 - 2389875255348584047616a^{16}c^7 \\
& -1811210812639607808a^{17}c^7 + 89589265290590208a^{18}c^7 + 469107249262080a^{19}c^7 \\
& +412535332352a^{20}c^7 - 2057442816a^{21}c^7 - 3281408a^{22}c^7 \\
& +64447363569356834989024133875256882708348928c^8 \\
& -35914906602747459100651507474947632466493440ac^8 \\
& +7123907332965106557753659796009964663734272a^2c^8 \\
& -580635962968394103885702593436357151948800a^3c^8 \\
& +10013280618104858142996168906416767107072a^4c^8 \\
& +1030877958859430152126427334499401400320a^5c^8 \\
& -33375342179062817786908043589441978368a^6c^8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -1035524440946277352189175634567069696a^7c^8 + 29915324732693006166880702796316672a^8c^8 \\
& + 806401489959567645699210495160320a^9c^8 - 9708681549441763729549486761984a^{10}c^8 \\
& - 372605050752770223923724693504a^{11}c^8 - 469356464603790946519873536a^{12}c^8 \\
& + 70162190439039437549690880a^{13}c^8 + 636329585835794387496960a^{14}c^8 \\
& - 2258055503557114060800a^{15}c^8 - 58498222670061318144a^{16}c^8 - 235538275613921280a^{17}c^8 \\
& + 476709500467200a^{18}c^8 + 5184755896320a^{19}c^8 + 9096062976a^{20}c^8 \\
& + 8413831451454398671211253430202993574150144c^9 \\
& - 3994332131505973182909453266446303132385280ac^9 \\
& + 661416270356953318924701762753931771904000a^2c^9 \\
& - 41940934275868854919469461999031961255936a^3c^9 \\
& + 114795158534557413284964316101038047232a^4c^9 \\
& + 80195472878180969900057410215739146240a^5c^9 \\
& - 1124551589578132034896537160373854208a^6c^9 - 77437309796637223617844172236922880a^7c^9 \\
& + 717055873265261304321786692980736a^8c^9 + 45930319435013377467440146867200a^9c^9 \\
& + 16568272090662756186824944128a^{10}c^9 - 13476520098956257499744400384a^{11}c^9 \\
& - 110578595754871858567709184a^{12}c^9 + 1207709077283385505720320a^{13}c^9 \\
& + 20662780586059518100480a^{14}c^9 + 47808751023867525120a^{15}c^9 - 701593559466488832a^{16}c^9 \\
& - 4612395879336960a^{17}c^9 - 5277340823040a^{18}c^9 + 20574428160a^{19}c^9 + 36095488a^{20}c^9 \\
& + 902023097253511514784928036423916050186240c^{10} \\
& - 364948213813154206097473504443127761469440ac^{10} \\
& + 50151066940062270305425584264615259275264a^2c^{10} \\
& - 2385666204895399774638860449294697103360a^3c^{10} \\
& - 29584657450502853080248056967423066112a^4c^{10} \\
& + 4590342492402740888445975946760159232a^5c^{10} \\
& - 3766117840717582589464984927207424a^6c^{10} - 3885763443399271253436458077716480a^7c^{10} \\
& - 8683461771353251592701513826304a^8c^{10} + 1691688984552250258698247348224a^9c^{10} \\
& + 14274101088874635506907881472a^{10}c^{10} - 290215571492979598027161600a^{11}c^{10} \\
& - 4516452819636092112633856a^{12}c^{10} + 1634202502400839827456a^{13}c^{10} \\
& + 361302356786663964672a^{14}c^{10} + 1926337292710871040a^{15}c^{10} - 2139345499619328a^{16}c^{10} \\
& - 39404144812032a^{17}c^{10} - 76811198464a^{18}c^{10} \\
& + 80390173322487870753544750441989637406720c^{11} \\
& - 27681326391739888280153640647653117132800ac^{11} \\
& + 3129618037971996304940434335899007844352a^2c^{11} \\
& - 105090325289687581517088997559039950848a^3c^{11} \\
& - 320422725168113054537267966323221184a^4c^{11}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& +196512624407388790832342987959861248a^5c^{11} + 2087088799367409351825822725734400a^6c^{11} \\
& -136810454670409251188372276035584a^7c^{11} - 1563684050989749415212993282048a^8c^{11} \\
& +40232775750765244192400025600a^9c^{11} + 669856494577843197251168256a^{10}c^{11} \\
& -2600495563365900605104128a^{11}c^{11} - 101054651520675639468032a^{12}c^{11} \\
& -411631534187538223104a^{13}c^{11} + 3177268113601720320a^{14}c^{11} + 27651986557378560a^{15}c^{11} \\
& +39978732478464a^{16}c^{11} - 127935535104a^{17}c^{11} - 249387008a^{18}c^{11} \\
& +6011504443812791784462808494698460610560c^{12} \\
& -1756587642604168209215602456732788326400ac^{12} \\
& +161458460914447859965301557100900515840a^2c^{12} \\
& -3405375709998780501066378923193925632a^3c^{12} \\
& -198330395489494829947780591289630720a^4c^{12} + 6185084859268652851177515248517120a^5c^{12} \\
& +142961725876531248424599719510016a^6c^{12} - 3282736963717249866912152420352a^7c^{12} \\
& -72222473957362316717007470592a^8c^{12} + 509089884521501014661529600a^9c^{12} \\
& +17583213560178719543394304a^{10}c^{12} + 43903576123455584600064a^{11}c^{12} \\
& -1324814241900972146688a^{12}c^{12} - 9594168941433323520a^{13}c^{12} + 3179145676062720a^{14}c^{12} \\
& +191050399088640a^{15}c^{12} + 418970173440a^{16}c^{12} + 379819823006335416921526441752794234880c^{13} \\
& -93770110175324094948603867777277624320ac^{13} \\
& +6895530324194773825822783010246754304a^2c^{13} \\
& -67374385995605578433337578165895168a^3c^{13} - 8801729663018801430628629761359872a^4c^{13} \\
& +131995750832188727145377649131520a^5c^{13} + 5716078369288898170171260207104a^6c^{13} \\
& -44650364933322674874708197376a^7c^{13} - 2037735728746887161256140800a^8c^{13} \\
& -2003213137113027750789120a^9c^{13} + 291521398196087183736832a^{10}c^{13} \\
& +1880955324933964038144a^{11}c^{13} - 8453006959639216128a^{12}c^{13} - 107010267766456320a^{13}c^{13} \\
& -193403077754880a^{14}c^{13} + 524863733760a^{15}c^{13} + 1151016960a^{16}c^{13} \\
& +20378461723974834183946479387719761920c^{14} - 4225861899605037799430157454698086400ac^{14} \\
& +243246675452904197173151885359579136a^2c^{14} + 183796980775398087110335943147520a^3c^{14} \\
& -297120471421972648153649585848320a^4c^{14} + 1256002137606645628935811891200a^5c^{14} \\
& +159523441825166765944537612288a^6c^{14} + 108127355219080577010892800a^7c^{14} \\
& -38783653358950851147202560a^8c^{14} - 233080622370388739358720a^9c^{14} \\
& +2914903983661895909376a^{10}c^{14} + 30505840208817684480a^{11}c^{14} + 12969253947310080a^{12}c^{14} \\
& -617239750901760a^{13}c^{14} - 1546966794240a^{14}c^{14} + 931599000551830597248660685990133760c^{15} \\
& -161064951065689450838436224843120640ac^{15} + 7038662828348231262404904335966208a^2c^{15} \\
& +77362173276271043074045400580096a^3c^{15} - 7760563119360787326317473300480a^4c^{15} \\
& -30717663309016738582721200128a^5c^{15} + 3224428205441670449097080832a^6c^{15} \\
& +21513860997336271636267008a^7c^{15} - 491780583986888169881600a^8c^{15}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& -5109275964306436521984a^9c^{15} + 12151080561647419392a^{10}c^{15} + 275416785707728896a^{11}c^{15} \\
& \quad + 623814359777280a^{12}c^{15} - 1469618454528a^{13}c^{15} - 3683254272a^{14}c^{15} \\
& \quad + 36354665714647566301947230662164480c^{16} - 5192284599155266987778685806837760ac^{16} \\
& \quad + 164679710230976039419640102780928a^2c^{16} + 3587988397955062408574398365696a^3c^{16} \\
& \quad - 156106890071336647983849537536a^4c^{16} - 1722678005662129516322488320a^5c^{16} \\
& \quad + 46510385068964404570357760a^6c^{16} + 559651319300458796285952a^7c^{16} \\
& \quad - 3635928833515306352640a^8c^{16} - 63145889729670021120a^9c^{16} - 79661106634948608a^{10}c^{16} \\
& \quad + 1357927451983872a^{11}c^{16} + 3970548105216a^{12}c^{16} + 1211564592842492994413829071831040c^{17} \\
& \quad - 141338364119403481556505140920320ac^{17} + 3025869423602487964672131596288a^2c^{17}
\end{aligned}$$

Derivation of the result (8):

Substituting  $b = -a - 57$ ,  $z = \frac{1}{2}$  in given result (2), we get

$$\begin{aligned}
& (2a + 57) {}_2F_1 \left[ \begin{matrix} a, & -a - 57 & ; & \frac{1}{2} \\ c & & & \end{matrix} \right] \\
& = a {}_2F_1 \left[ \begin{matrix} a + 1, & -a - 57 & ; & \frac{1}{2} \\ c & & & \end{matrix} \right] + (a + 57) {}_2F_1 \left[ \begin{matrix} a, & -a - 56 & ; & \frac{1}{2} \\ c & & & \end{matrix} \right]
\end{aligned}$$

Now involving the derived result of Ref[6], we can prove the main result.

### REFERENCES RÉFÉRENCES REFERENCIAS

1. Andrews, L.C.(1992) ; *Special Function of mathematics for Engineers,second Edition*, McGraw-Hill Co Inc., New York.
2. Bells, Richard, Wong, Roderick ; *Special Functions , A Graduate Text*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 2010.
3. Prudnikov, A. P., Brychkov, Yu. A. and Marichev, O.I.; *Integrals and Series Vol. 3: More Special Functions*. Nauka, Moscow, 1986. Translated from the Russian by G.G. Gould, Gordon and Breach Science Publishers, New York, Philadelphia, London, Paris, Montreux, Tokyo, Melbourne, 1990.
4. Rainville, E. D.; The contiguous function relations for  ${}_pF_q$  with applications to Bateman's  $J_n^{u,v}$  and Rice's  $H_n(\zeta, p, \nu)$ , *Bull. Amer. Math. Soc.*, 51(1945), 714-723.
5. Salahuddin, Chaudhary, M.P ; A New Summation Formula Allied With Hypergeometric Function, *Global Journal of Science Frontier Research*, 11(2010),21- 37.



This page is intentionally left blank