



GLOBAL JOURNAL OF SCIENCE FRONTIER RESEARCH: F
MATHEMATICS AND DECISION SCIENCES

Volume 14 Issue 2 Version 1.0 Year 2014

Type : Double Blind Peer Reviewed International Research Journal

Publisher: Global Journals Inc. (USA)

Online ISSN: 2249-4626 & Print ISSN: 0975-5896

A Summation Formula Involving Certain Special Functions

By Salahuddin & Intazar Husain

P.D.M College of Engineering, India

Abstract- The main aim of the present paper is to compute a summation formula involving Recurrence relation and Contiguous relation.

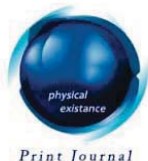
Keywords: *gauss second summation theorem, recurrence relation, prudnikov.*

GJSFR-F Classification : *MSC 2010: 33C05 , 33C20 , 33C45 ,33D50 ,33D60*



Strictly as per the compliance and regulations of :





A Summation Formula Involving Certain Special Functions

Salahuddin ^α & Intazar Husain ^σ

Abstract- The main aim of the present paper is to compute a summation formula involving Recurrence relation and Contiguous relation.

Keywords : gauss second summation theorem, recurrence relation, prudnikov.

I. INTRODUCTION

Generalized Gaussian Hypergeometric function of one variable is defined by

$${}_A F_B \left[\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_A ; \\ b_1, b_2, \dots, b_B ; \end{matrix} z \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k (a_2)_k \dots (a_A)_k z^k}{(b_1)_k (b_2)_k \dots (b_B)_k k!} \quad (1)$$

where the parameters $b_1, b_2, \dots, b_B$ are neither zero nor negative integers and A, B are non-negative integers and $|z| = 1$

Contiguous Relation is defined by

[Andrews p.363(9.16), E. D. p.51(10)]

$$(a-b) {}_2F_1 \left[\begin{matrix} a, b ; \\ c ; \end{matrix} z \right] = a {}_2F_1 \left[\begin{matrix} a+1, b ; \\ c ; \end{matrix} z \right] - b {}_2F_1 \left[\begin{matrix} a, b+1 ; \\ c ; \end{matrix} z \right] \quad (2)$$

Gauss second summation theorem is defined by [Prudnikov., 491(7.3.7.5)]

$${}_2F_1 \left[\begin{matrix} a, b ; \\ \frac{a+b+1}{2} ; \end{matrix} \frac{1}{2} \right] = \frac{\Gamma(\frac{a+b+1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{a+1}{2}) \Gamma(\frac{b+1}{2})} \quad (3)$$

$$= \frac{2^{(b-1)} \Gamma(\frac{b}{2}) \Gamma(\frac{a+b+1}{2})}{\Gamma(b) \Gamma(\frac{a+1}{2})} \quad (4)$$

In a monograph of Prudnikov et al., a summation theorem is given in the form [Prudnikov., p.491(7.3.7.8)]

$${}_2F_1 \left[\begin{matrix} a, b ; \\ \frac{a+b-1}{2} ; \end{matrix} \frac{1}{2} \right] = \sqrt{\pi} \left[\frac{\Gamma(\frac{a+b+1}{2})}{\Gamma(\frac{a+1}{2}) \Gamma(\frac{b+1}{2})} + \frac{2 \Gamma(\frac{a+b-1}{2})}{\Gamma(a) \Gamma(b)} \right] \quad (5)$$

Now using Legendre's duplication formula and Recurrence relation for Gamma function, the above theorem can be written in the form

$${}_2F_1 \left[\begin{matrix} a, b \\ \frac{a+b-1}{2} \end{matrix} ; \frac{1}{2} \right] = \frac{2^{(b-1)} \Gamma(\frac{a+b-1}{2})}{\Gamma(b)} \left[\frac{\Gamma(\frac{b}{2})}{\Gamma(\frac{a-1}{2})} + \frac{2^{(a-b+1)} \Gamma(\frac{a}{2}) \Gamma(\frac{a+1}{2})}{\{\Gamma(a)\}^2} + \frac{\Gamma(\frac{b+2}{2})}{\Gamma(\frac{a+1}{2})} \right] \quad (6)$$

Notes

Recurrence relation is defined by

$$\Gamma(\zeta + 1) = \zeta \Gamma(\zeta) \quad (7)$$

II. MAIN SUMMATION FORMULA

$$\begin{aligned} & {}_2F_1 \left[\begin{matrix} a, b \\ \frac{a+b+45}{2} \end{matrix} ; \frac{1}{2} \right] = \\ &= \frac{2^b \Gamma(\frac{a+b+45}{2})}{(a-b) \Gamma(b)} \left[\frac{\Gamma(\frac{b}{2})}{\Gamma(\frac{a+1}{2})} \left\{ \frac{1}{\left[\prod_{\zeta=1}^{21} \{a-b-(2\zeta-1)\} \right] \left[\prod_{\eta=1}^{22} \{a-b+(2\eta-1)\} \right]} \times \right. \right. \\ & \times \left(2097152a(-13113070457687988603440625 + 32835960506324395192397625a \right. \\ & \quad - 33100902479081461753011150a^2 + 18852771841456100048901630a^3 \\ & \quad - 6998152417792503243516261a^4 + 1830981648088050432124941a^5 \\ & \quad - 354501246907809948405480a^6 + 52462262753503539155240a^7 - 6068045552614043865426a^8 \\ & \quad + 557078686778195952226a^9 - 41014337504927410260a^{10} + 2436777594647459700a^{11} \\ & \quad - 117140064945846306a^{12} + 4552422878866226a^{13} - 142380641710440a^{14} + 3551773672360a^{15} \\ & \quad - 69638530941a^{16} + 1048818981a^{17} - 11702670a^{18} + 91070a^{19} - 441a^{20} + a^{21} \\ & \quad + 53745962882620608893167875b - 45053743668222224004344100ab \\ & \quad + 113826458136107026075141710a^2b - 32581896347358559999317420a^3b \\ & \quad + 22213537883171068151439531a^4b - 3437881821120782582829456a^5b \\ & \quad + 1069513403791665845357128a^6b - 102017962030642073210480a^7b \\ & \quad + 17605238308074264053574a^8b - 1094032303287108057912a^9b + 114934366191849037236a^{10}b \\ & \quad - 4742709531308534760a^{11}b + 317038686494337262a^{12}b - 8612153544899408a^{13}b \\ & \quad + 370669544999304a^{14}b - 6357587526960a^{15}b + 172733256855a^{16}b - 1689533124a^{17}b + 27096622a^{18}b \\ & \quad - 114380a^{19}b + 903a^{20}b + 3418740929846540363004450b^2 + 152628207170808204647275770ab^2 \\ & \quad - 29662057538012999895338574a^2b^2 + 73924679489058918046015938a^3b^2 \\ & \quad - 9095261732430392323657176a^4b^2 + 6475045382105375335889480a^5b^2 \\ & \quad \left. \left. - 523071699408050859929016a^6b^2 + 171242942351303632910536a^7b^2 \right) \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -9336842670271654008484a^8b^2 + 1689474770765990596076a^9b^2 - 62588562419040481252a^{10}b^2 \\
& + 6843044908448608444a^{11}b^2 - 169609751776172344a^{12}b^2 + 11684556963374568a^{13}b^2 \\
& - 185095028637272a^{14}b^2 + 8105951624872a^{15}b^2 - 73945230446a^{16}b^2 + 2006403306a^{17}b^2 \\
& - 7972286a^{18}b^2 + 123410a^{19}b^2 + 49302844553810665888575930b^3 + 5196235439832751151572788ab^3 \\
& + 91735804724807821121609526a^2b^3 - 6747725269089701729734368a^3b^3 \\
& + 16438427349229328982545896a^4b^3 - 1038876114726270005445776a^5b^3 \\
& + 735240415476876038312632a^6b^3 - 34241820697597088722848a^7b^3 \\
& + 11226186945118492939852a^8b^3 - 371078402291905961224a^9b^3 + 67240314521518855860a^{10}b^3 \\
& - 1526743180734652192a^{11}b^3 + 166445736776215624a^{12}b^3 - 2459287660143888a^{13}b^3 \\
& + 167607787407128a^{14}b^3 - 1445744454752a^{15}b^3 + 61843300298a^{16}b^3 - 235148940a^{17}b^3 \\
& + 6096454a^{18}b^3 + 6523406582853698567485227b^4 + 43689757687398414790547553ab^4 \\
& + 1858191737565276546672360a^2b^4 + 19566549200385431103972216a^3b^4 \\
& - 673581690360746582755756a^4b^4 + 1596002262124887064872892a^5b^4 \\
& - 56864612882774626831720a^6b^4 + 39096473046294723020936a^7b^4 - 1099649665242617000798a^8b^4 \\
& + 352022359346404662630a^9b^4 - 7157179769538448936a^{10}b^4 + 1266877992724507592a^{11}b^4 \\
& - 17271058034689004a^{12}b^4 + 1832663509135228a^{13}b^4 - 14882731838680a^{14}b^4 + 979484169144a^{15}b^4 \\
& - 3560764597a^{16}b^4 + 145008513a^{17}b^4 + 6412982275781442369534447b^5 \\
& + 3020391903873160874624880ab^5 + 11072544506717425040943320a^2b^5 \\
& + 251409502832929940580848a^3b^5 + 1850900598832213039588308a^4b^5 \\
& - 33362183528683696143184a^5b^5 + 76635144078132798484872a^6b^5 - 1614107103242780383952a^7b^5 \\
& + 1064600574662833613834a^8b^5 - 18285405023328014000a^9b^5 + 5631584078513951272a^{10}b^5 \\
& - 68669517587706672a^{11}b^5 + 11692563911936180a^{12}b^5 - 87796234586480a^{13}b^5 + 8925930851320a^{14}b^5 \\
& - 30677356528a^{15}b^5 + 1917334783a^{16}b^5 + 604573745934401191005912b^6 \\
& + 2761535361221837965136664ab^6 + 446409836411046907751368a^2b^6 \\
& + 1155941471891438860601896a^3b^6 + 15624214876016679739352a^4b^6 \\
& + 87313680148565150111832a^5b^6 - 874649607643712372472a^6b^6 + 1943115716512939776808a^7b^6 \\
& - 24520882366446890424a^8b^6 + 15396021766853800072a^9b^6 - 157355447527654376a^{10}b^6 \\
& + 46179770718580408a^{11}b^6 - 309271965286648a^{12}b^6 + 50125620668424a^{13}b^6 - 159286274280a^{14}b^6 \\
& + 15338678264a^{15}b^6 + 231724339078175706150136b^7 + 153811376527605888117264ab^7 \\
& + 374921775760059309890200a^2b^7 + 28831347254232216398432a^3b^7 \\
& + 58118545317700335413400a^4b^7 + 490468210861184892336a^5b^7 + 2185851421255096595000a^6b^7 \\
& - 12438236313336433600a^7b^7 + 26672527585599011688a^8b^7 - 196990298922392976a^9b^7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +117137843987075912a^{10}b^7 - 652631982303392a^{11}b^7 + 181277011099912a^{12}b^7 - 512075874352a^{13}b^7 \\
& + 78378960360a^{14}b^7 + 15128932813380875312110b^8 + 56881481026993911310578ab^8 \\
& + 13039358045721374943420a^2b^8 + 22139104917821671572676a^3b^8 + 921471943096864139266a^4b^8 \\
& + 1520878767836758616286a^5b^8 + 8095043487442343432a^6b^8 + 29720901376476436984a^7b^8 \\
& - 94427080896983406a^8b^8 + 195113449113625614a^9b^8 - 774287072717444a^{10}b^8 \\
& + 434411052282116a^{11}b^8 - 1013931747010a^{12}b^8 + 265182149218a^{13}b^8 + 3024008960876320420246b^9 \\
& + 2332408473401733698504ab^9 + 4569477008635213654148a^2b^9 + 492678254183696354488a^3b^9 \\
& + 645945537218444676642a^4b^9 + 15329149883995675728a^5b^9 + 21357540300644860312a^6b^9 \\
& + 69758491996612848a^7b^9 + 215842089833789562a^8b^9 - 353214178214040a^9b^9 \\
& + 702101231167908a^{10}b^9 - 1152680301864a^{11}b^9 + 608359048206a^{12}b^9 + 137104871154095942604b^{10} \\
& + 454222013907202843900ab^{10} + 120615054891875887772a^2b^{10} + 161949836634482706524a^3b^{10} \\
& + 9180121926490903960a^4b^{10} + 9807216639522886584a^5b^{10} + 132405723186144408a^6b^{10} \\
& + 158910354362756568a^7b^{10} + 291326223911580a^8b^{10} + 772341543530700a^9b^{10} \\
& - 503154100020a^{10}b^{10} + 960566918220a^{11}b^{10} + 16116280063842269532b^{11} \\
& + 13266524009934170456ab^{11} + 22468630494292536788a^2b^{11} + 2744654110430536928a^3b^{11} \\
& + 2812829209563463896a^4b^{11} + 85999358210064208a^5b^{11} + 77331167721172456a^6b^{11} \\
& + 552383916933472a^7b^{11} + 579276741224844a^8b^{11} + 457412818200a^9b^{11} + 1052049481860a^{10}b^{11} \\
& + 504464808447965118b^{12} + 1520074513892383306ab^{12} + 422390481555014024a^2b^{12} \\
& + 483431815242444952a^3b^{12} + 29546096072985492a^4b^{12} + 24458385708121820a^5b^{12} \\
& + 381004267695688a^6b^{12} + 294616546783832a^7b^{12} + 864510226398a^8b^{12} + 800472431850a^9b^{12} \\
& + 36842919196739110b^{13} + 30556991340393392ab^{13} + 46327319945209016a^2b^{13} \\
& + 5648934122340208a^3b^{13} + 4881179381635732a^4b^{13} + 144878605202576a^5b^{13} \\
& + 100261443987096a^6b^{13} + 623957998160a^7b^{13} + 421171648758a^8b^{13} + 777692306266456b^{14} \\
& + 2164283489573848ab^{14} + 578915870956584a^2b^{14} + 585771144020552a^3b^{14} + 32252520795880a^4b^{14} \\
& + 22313057280808a^5b^{14} + 256037937176a^6b^{14} + 151532656696a^7b^{14} + 35857948972408b^{15} \\
& + 28280942023504ab^{15} + 39037774410808a^2b^{15} + 4143128700320a^3b^{15} + 3132630060840a^4b^{15} \\
& + 63714509712a^5b^{15} + 36576848168a^6b^{15} + 484185248451b^{16} + 1250881854197ab^{16} \\
& + 288251667106a^2b^{16} + 262400960302a^3b^{16} + 9586673915a^4b^{16} + 5752004349a^5b^{16} + 13811946279b^{17} \\
& + 9489432124ab^{17} + 11986499486a^2b^{17} + 837826964a^3b^{17} + 563921995a^4b^{17} + 106564578b^{18} \\
& + 254376218ab^{18} + 39191490a^2b^{18} + 32224114a^3b^{18} + 1743994b^{19} + 839188ab^{19} + 962598a^2b^{19} \\
& + 5719b^{20} + 12341ab^{20} + 43b^{21})) + \frac{1}{\left[\prod_{\mu=1}^{22} \{a-b-(2\mu-1)\} \right] \left[\prod_{\xi=1}^{21} \{a-b+(2\xi-1)\} \right]} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (2097152b(-13113070457687988603440625 + 53745962882620608893167875a \\
& + 3418740929846540363004450a^2 + 49302844553810665888575930a^3 \\
& + 6523406582853698567485227a^4 + 6412982275781442369534447a^5 + 604573745934401191005912a^6 \\
& + 231724339078175706150136a^7 + 15128932813380875312110a^8 + 3024008960876320420246a^9 \\
& + 137104871154095942604a^{10} + 16116280063842269532a^{11} + 504464808447965118a^{12} \\
& + 36842919196739110a^{13} + 777692306266456a^{14} + 35857948972408a^{15} + 484185248451a^{16} \\
& + 13811946279a^{17} + 106564578a^{18} + 1743994a^{19} + 5719a^{20} + 43a^{21} + 32835960506324395192397625b \\
& - 45053743668222224004344100ab + 152628207170808204647275770a^2b \\
& + 5196235439832751151572788a^3b + 43689757687398414790547553a^4b \\
& + 3020391903873160874624880a^5b + 2761535361221837965136664a^6b \\
& + 153811376527605888117264a^7b + 56881481026993911310578a^8b + 2332408473401733698504a^9b \\
& + 454222013907202843900a^{10}b + 13266524009934170456a^{11}b + 1520074513892383306a^{12}b \\
& + 30556991340393392a^{13}b + 2164283489573848a^{14}b + 28280942023504a^{15}b + 1250881854197a^{16}b \\
& + 9489432124a^{17}b + 254376218a^{18}b + 839188a^{19}b + 12341a^{20}b - 33100902479081461753011150b^2 \\
& + 113826458136107026075141710ab^2 - 29662057538012999895338574a^2b^2 \\
& + 91735804724807821121609526a^3b^2 + 1858191737565276546672360a^4b^2 \\
& + 11072544506717425040943320a^5b^2 + 446409836411046907751368a^6b^2 \\
& + 374921775760059309890200a^7b^2 + 13039358045721374943420a^8b^2 + 4569477008635213654148a^9b^2 \\
& + 120615054891875887772a^{10}b^2 + 22468630494292536788a^{11}b^2 + 422390481555014024a^{12}b^2 \\
& + 46327319945209016a^{13}b^2 + 578915870956584a^{14}b^2 + 39037774410808a^{15}b^2 + 288251667106a^{16}b^2 \\
& + 11986499486a^{17}b^2 + 39191490a^{18}b^2 + 962598a^{19}b^2 + 18852771841456100048901630b^3 \\
& - 32581896347358559999317420ab^3 + 73924679489058918046015938a^2b^3 \\
& - 6747725269089701729734368a^3b^3 + 19566549200385431103972216a^4b^3 \\
& + 251409502832929940580848a^5b^3 + 1155941471891438860601896a^6b^3 \\
& + 28831347254232216398432a^7b^3 + 22139104917821671572676a^8b^3 + 492678254183696354488a^9b^3 \\
& + 161949836634482706524a^{10}b^3 + 2744654110430536928a^{11}b^3 + 483431815242444952a^{12}b^3 \\
& + 5648934122340208a^{13}b^3 + 585771144020552a^{14}b^3 + 4143128700320a^{15}b^3 + 262400960302a^{16}b^3 \\
& + 837826964a^{17}b^3 + 32224114a^{18}b^3 - 6998152417792503243516261b^4 \\
& + 22213537883171068151439531ab^4 - 9095261732430392323657176a^2b^4 \\
& + 16438427349229328982545896a^3b^4 - 673581690360746582755756a^4b^4 \\
& + 1850900598832213039588308a^5b^4 + 15624214876016679739352a^6b^4 \\
& + 58118545317700335413400a^7b^4 + 921471943096864139266a^8b^4 + 645945537218444676642a^9b^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +9180121926490903960a^{10}b^4 + 2812829209563463896a^{11}b^4 + 29546096072985492a^{12}b^4 \\
& +4881179381635732a^{13}b^4 + 32252520795880a^{14}b^4 + 3132630060840a^{15}b^4 + 9586673915a^{16}b^4 \\
& +563921995a^{17}b^4 + 1830981648088050432124941b^5 - 3437881821120782582829456ab^5 \\
& +6475045382105375335889480a^2b^5 - 1038876114726270005445776a^3b^5 \\
& +1596002262124887064872892a^4b^5 - 33362183528683696143184a^5b^5 \\
& +87313680148565150111832a^6b^5 + 490468210861184892336a^7b^5 + 1520878767836758616286a^8b^5 \\
& +15329149883995675728a^9b^5 + 9807216639522886584a^{10}b^5 + 85999358210064208a^{11}b^5 \\
& +24458385708121820a^{12}b^5 + 144878605202576a^{13}b^5 + 22313057280808a^{14}b^5 + 63714509712a^{15}b^5 \\
& +5752004349a^{16}b^5 - 354501246907809948405480b^6 + 1069513403791665845357128ab^6 \\
& -523071699408050859929016a^2b^6 + 735240415476876038312632a^3b^6 \\
& -56864612882774626831720a^4b^6 + 76635144078132798484872a^5b^6 - 874649607643712372472a^6b^6 \\
& +2185851421255096595000a^7b^6 + 8095043487442343432a^8b^6 + 21357540300644860312a^9b^6 \\
& +132405723186144408a^{10}b^6 + 77331167721172456a^{11}b^6 + 381004267695688a^{12}b^6 \\
& +100261443987096a^{13}b^6 + 256037937176a^{14}b^6 + 36576848168a^{15}b^6 + 52462262753503539155240b^7 \\
& -102017962030642073210480ab^7 + 171242942351303632910536a^2b^7 \\
& -34241820697597088722848a^3b^7 + 39096473046294723020936a^4b^7 - 1614107103242780383952a^5b^7 \\
& +1943115716512939776808a^6b^7 - 12438236313336433600a^7b^7 + 29720901376476436984a^8b^7 \\
& +69758491996612848a^9b^7 + 158910354362756568a^{10}b^7 + 552383916933472a^{11}b^7 \\
& +294616546783832a^{12}b^7 + 623957998160a^{13}b^7 + 151532656696a^{14}b^7 - 6068045552614043865426b^8 \\
& +17605238308074264053574ab^8 - 933684267027165400848a^2b^8 + 11226186945118492939852a^3b^8 \\
& -1099649665242617000798a^4b^8 + 1064600574662833613834a^5b^8 - 24520882366446890424a^6b^8 \\
& +26672527585599011688a^7b^8 - 94427080896983406a^8b^8 + 215842089833789562a^9b^8 \\
& +291326223911580a^{10}b^8 + 579276741224844a^{11}b^8 + 864510226398a^{12}b^8 + 421171648758a^{13}b^8 \\
& +557078686778195952226b^9 - 1094032303287108057912ab^9 + 1689474770765990596076a^2b^9 \\
& -371078402291905961224a^3b^9 + 352022359346404662630a^4b^9 - 18285405023328014000a^5b^9 \\
& +15396021766853800072a^6b^9 - 196990298922392976a^7b^9 + 195113449113625614a^8b^9 \\
& -353214178214040a^9b^9 + 772341543530700a^{10}b^9 + 457412818200a^{11}b^9 + 800472431850a^{12}b^9 \\
& -41014337504927410260b^{10} + 114934366191849037236ab^{10} - 62588562419040481252a^2b^{10} \\
& +67240314521518855860a^3b^{10} - 7157179769538448936a^4b^{10} + 5631584078513951272a^5b^{10} \\
& -157355447527654376a^6b^{10} + 117137843987075912a^7b^{10} - 774287072717444a^8b^{10} \\
& +702101231167908a^9b^{10} - 503154100020a^{10}b^{10} + 1052049481860a^{11}b^{10} + 2436777594647459700b^{11} \\
& -4742709531308534760ab^{11} + 6843044908448608444a^2b^{11} - 1526743180734652192a^3b^{11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +1266877992724507592a^4b^{11} - 68669517587706672a^5b^{11} + 46179770718580408a^6b^{11} \\
& -652631982303392a^7b^{11} + 434411052282116a^8b^{11} - 1152680301864a^9b^{11} + 960566918220a^{10}b^{11} \\
& -117140064945846306b^{12} + 317038686494337262ab^{12} - 169609751776172344a^2b^{12} \\
& +166445736776215624a^3b^{12} - 17271058034689004a^4b^{12} + 11692563911936180a^5b^{12} \\
& -309271965286648a^6b^{12} + 181277011099912a^7b^{12} - 1013931747010a^8b^{12} + 608359048206a^9b^{12} \\
& +4552422878866226b^{13} - 8612153544899408ab^{13} + 11684556963374568a^2b^{13} \\
& -2459287660143888a^3b^{13} + 1832663509135228a^4b^{13} - 87796234586480a^5b^{13} + 50125620668424a^6b^{13} \\
& -512075874352a^7b^{13} + 265182149218a^8b^{13} - 142380641710440b^{14} + 370669544999304ab^{14} \\
& -185095028637272a^2b^{14} + 167607787407128a^3b^{14} - 14882731838680a^4b^{14} + 8925930851320a^5b^{14} \\
& -159286274280a^6b^{14} + 78378960360a^7b^{14} + 3551773672360b^{15} - 6357587526960ab^{15} \\
& +8105951624872a^2b^{15} - 1445744454752a^3b^{15} + 979484169144a^4b^{15} - 30677356528a^5b^{15} \\
& +15338678264a^6b^{15} - 69638530941b^{16} + 172733256855ab^{16} - 73945230446a^2b^{16} + 61843300298a^3b^{16} \\
& -3560764597a^4b^{16} + 1917334783a^5b^{16} + 1048818981b^{17} - 1689533124ab^{17} + 2006403306a^2b^{17} \\
& -235148940a^3b^{17} + 145008513a^4b^{17} - 11702670b^{18} + 27096622ab^{18} - 7972286a^2b^{18} + 6096454a^3b^{18} \\
& +91070b^{19} - 114380ab^{19} + 123410a^2b^{19} - 441b^{20} + 903ab^{20} + b^{21})) \Bigg\} - \\
& -\frac{\Gamma(\frac{b+1}{2})}{\Gamma(\frac{a}{2})} \left\{ \frac{4194304}{\left[\prod_{\zeta=1}^{21} \{a-b-(2\zeta-1)\} \right] \left[\prod_{\eta=1}^{22} \{a-b+(2\eta-1)\} \right]} \left(13113070457687988603440625 \right. \right. \\
& +53745962882620608893167875a - 3418740929846540363004450a^2 \\
& +49302844553810665888575930a^3 - 6523406582853698567485227a^4 \\
& +6412982275781442369534447a^5 - 604573745934401191005912a^6 + 231724339078175706150136a^7 \\
& -15128932813380875312110a^8 + 3024008960876320420246a^9 - 137104871154095942604a^{10} \\
& +16116280063842269532a^{11} - 504464808447965118a^{12} + 36842919196739110a^{13} \\
& -777692306266456a^{14} + 35857948972408a^{15} - 484185248451a^{16} + 13811946279a^{17} - 106564578a^{18} \\
& +1743994a^{19} - 5719a^{20} + 43a^{21} + 32835960506324395192397625b + 45053743668222224004344100ab \\
& +152628207170808204647275770a^2b - 5196235439832751151572788a^3b \\
& +43689757687398414790547553a^4b - 3020391903873160874624880a^5b \\
& +2761535361221837965136664a^6b - 153811376527605888117264a^7b \\
& +56881481026993911310578a^8b - 2332408473401733698504a^9b + 454222013907202843900a^{10}b \\
& +2164283489573848a^{14}b - 28280942023504a^{15}b + 1250881854197a^{16}b - 9489432124a^{17}b \\
& +254376218a^{18}b - 839188a^{19}b + 12341a^{20}b + 33100902479081461753011150b^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +113826458136107026075141710ab^2 + 29662057538012999895338574a^2b^2 \\
& +91735804724807821121609526a^3b^2 - 1858191737565276546672360a^4b^2 \\
& +11072544506717425040943320a^5b^2 - 446409836411046907751368a^6b^2 \\
& +374921775760059309890200a^7b^2 - 13039358045721374943420a^8b^2 \\
& +4569477008635213654148a^9b^2 - 120615054891875887772a^{10}b^2 + 22468630494292536788a^{11}b^2 \\
& -422390481555014024a^{12}b^2 + 46327319945209016a^{13}b^2 - 578915870956584a^{14}b^2 \\
& +39037774410808a^{15}b^2 - 288251667106a^{16}b^2 + 11986499486a^{17}b^2 - 39191490a^{18}b^2 + 962598a^{19}b^2 \\
& +18852771841456100048901630b^3 + 32581896347358559999317420ab^3 \\
& +73924679489058918046015938a^2b^3 + 6747725269089701729734368a^3b^3 \\
& +19566549200385431103972216a^4b^3 - 251409502832929940580848a^5b^3 \\
& +1155941471891438860601896a^6b^3 - 28831347254232216398432a^7b^3 \\
& +22139104917821671572676a^8b^3 - 492678254183696354488a^9b^3 + 161949836634482706524a^{10}b^3 \\
& -2744654110430536928a^{11}b^3 + 483431815242444952a^{12}b^3 - 5648934122340208a^{13}b^3 \\
& +585771144020552a^{14}b^3 - 4143128700320a^{15}b^3 + 262400960302a^{16}b^3 - 837826964a^{17}b^3 \\
& +32224114a^{18}b^3 + 6998152417792503243516261b^4 + 22213537883171068151439531ab^4 \\
& +9095261732430392323657176a^2b^4 + 16438427349229328982545896a^3b^4 \\
& +673581690360746582755756a^4b^4 + 1850900598832213039588308a^5b^4 \\
& -15624214876016679739352a^6b^4 + 58118545317700335413400a^7b^4 - 921471943096864139266a^8b^4 \\
& +645945537218444676642a^9b^4 - 9180121926490903960a^{10}b^4 + 2812829209563463896a^{11}b^4 \\
& -29546096072985492a^{12}b^4 + 4881179381635732a^{13}b^4 - 32252520795880a^{14}b^4 \\
& +3132630060840a^{15}b^4 - 9586673915a^{16}b^4 + 563921995a^{17}b^4 + 1830981648088050432124941b^5 \\
& +3437881821120782582829456ab^5 + 6475045382105375335889480a^2b^5 \\
& +1038876114726270005445776a^3b^5 + 1596002262124887064872892a^4b^5 \\
& +33362183528683696143184a^5b^5 + 87313680148565150111832a^6b^5 - 490468210861184892336a^7b^5 \\
& +1520878767836758616286a^8b^5 - 15329149883995675728a^9b^5 + 9807216639522886584a^{10}b^5 \\
& -85999358210064208a^{11}b^5 + 24458385708121820a^{12}b^5 - 144878605202576a^{13}b^5 \\
& +22313057280808a^{14}b^5 - 63714509712a^{15}b^5 + 5752004349a^{16}b^5 + 354501246907809948405480b^6 \\
& +1069513403791665845357128ab^6 + 523071699408050859929016a^2b^6 \\
& +735240415476876038312632a^3b^6 + 56864612882774626831720a^4b^6 \\
& +76635144078132798484872a^5b^6 + 874649607643712372472a^6b^6 + 2185851421255096595000a^7b^6 \\
& -8095043487442343432a^8b^6 + 21357540300644860312a^9b^6 - 132405723186144408a^{10}b^6 \\
& +77331167721172456a^{11}b^6 - 381004267695688a^{12}b^6 + 100261443987096a^{13}b^6 - 256037937176a^{14}b^6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +36576848168a^1b^6 + 52462262753503539155240b^7 + 102017962030642073210480ab^7 \\
& +171242942351303632910536a^2b^7 + 34241820697597088722848a^3b^7 \\
& +39096473046294723020936a^4b^7 + 1614107103242780383952a^5b^7 + 1943115716512939776808a^6b^7 \\
& +12438236313336433600a^7b^7 + 29720901376476436984a^8b^7 - 69758491996612848a^9b^7 \\
& +158910354362756568a^{10}b^7 - 552383916933472a^{11}b^7 + 294616546783832a^{12}b^7 \\
& -623957998160a^{13}b^7 + 151532656696a^{14}b^7 + 6068045552614043865426b^8 \\
& +17605238308074264053574ab^8 + 9336842670271654008484a^2b^8 + 11226186945118492939852a^3b^8 \\
& +1099649665242617000798a^4b^8 + 1064600574662833613834a^5b^8 + 24520882366446890424a^6b^8 \\
& +26672527585599011688a^7b^8 + 94427080896983406a^8b^8 + 215842089833789562a^9b^8 \\
& -291326223911580a^{10}b^8 + 579276741224844a^{11}b^8 - 864510226398a^{12}b^8 + 421171648758a^{13}b^8 \\
& +557078686778195952226b^9 + 1094032303287108057912ab^9 + 1689474770765990596076a^2b^9 \\
& +371078402291905961224a^3b^9 + 352022359346404662630a^4b^9 + 18285405023328014000a^5b^9 \\
& +15396021766853800072a^6b^9 + 196990298922392976a^7b^9 + 195113449113625614a^8b^9 \\
& +353214178214040a^9b^9 + 772341543530700a^{10}b^9 - 457412818200a^{11}b^9 + 800472431850a^{12}b^9 \\
& +41014337504927410260b^{10} + 114934366191849037236ab^{10} + 62588562419040481252a^2b^{10} \\
& +67240314521518855860a^3b^{10} + 7157179769538448936a^4b^{10} + 5631584078513951272a^5b^{10} \\
& +157355447527654376a^6b^{10} + 117137843987075912a^7b^{10} + 774287072717444a^8b^{10} \\
& +702101231167908a^9b^{10} + 503154100020a^{10}b^{10} + 1052049481860a^{11}b^{10} + 2436777594647459700b^{11} \\
& +4742709531308534760ab^{11} + 6843044908448608444a^2b^{11} + 1526743180734652192a^3b^{11} \\
& +1266877992724507592a^4b^{11} + 68669517587706672a^5b^{11} + 46179770718580408a^6b^{11} \\
& +652631982303392a^7b^{11} + 434411052282116a^8b^{11} + 1152680301864a^9b^{11} + 960566918220a^{10}b^{11} \\
& +117140064945846306b^{12} + 317038686494337262ab^{12} + 169609751776172344a^2b^{12} \\
& +166445736776215624a^3b^{12} + 17271058034689004a^4b^{12} + 11692563911936180a^5b^{12} \\
& +309271965286648a^6b^{12} + 181277011099912a^7b^{12} + 1013931747010a^8b^{12} + 608359048206a^9b^{12} \\
& +4552422878866226b^{13} + 8612153544899408ab^{13} + 11684556963374568a^2b^{13} \\
& +2459287660143888a^3b^{13} + 1832663509135228a^4b^{13} + 87796234586480a^5b^{13} \\
& +50125620668424a^6b^{13} + 512075874352a^7b^{13} + 265182149218a^8b^{13} + 142380641710440b^{14} \\
& +370669544999304ab^{14} + 185095028637272a^2b^{14} + 167607787407128a^3b^{14} + 14882731838680a^4b^{14} \\
& +8925930851320a^5b^{14} + 159286274280a^6b^{14} + 78378960360a^7b^{14} + 3551773672360b^{15} \\
& +6357587526960ab^{15} + 8105951624872a^2b^{15} + 1445744454752a^3b^{15} + 979484169144a^4b^{15} \\
& +30677356528a^5b^{15} + 15338678264a^6b^{15} + 69638530941b^{16} + 172733256855ab^{16} \\
& +73945230446a^2b^{16} + 61843300298a^3b^{16} + 3560764597a^4b^{16} + 1917334783a^5b^{16} + 1048818981b^{17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +1689533124ab^{17} + 2006403306a^2b^{17} + 235148940a^3b^{17} + 145008513a^4b^{17} + 11702670b^{18} \\
& +27096622ab^{18} + 7972286a^2b^{18} + 6096454a^3b^{18} + 91070b^{19} + 114380ab^{19} + 123410a^2b^{19} + 441b^{20} \\
& +903ab^{20} + b^{21}) + \frac{4194304}{\left[\prod_{\mu=1}^{22} \{a-b-(2\mu-1)\} \right] \left[\prod_{\xi=1}^{21} \{a-b+(2\xi-1)\} \right]} \times \\
& \times \left(13113070457687988603440625 + 32835960506324395192397625a \right. \\
& +33100902479081461753011150a^2 + 18852771841456100048901630a^3 \\
& +6998152417792503243516261a^4 + 1830981648088050432124941a^5 \\
& +354501246907809948405480a^6 + 52462262753503539155240a^7 + 6068045552614043865426a^8 \\
& +557078686778195952226a^9 + 41014337504927410260a^{10} + 2436777594647459700a^{11} \\
& +117140064945846306a^{12} + 4552422878866226a^{13} + 142380641710440a^{14} + 3551773672360a^{15} \\
& +69638530941a^{16} + 1048818981a^{17} + 11702670a^{18} + 91070a^{19} + 441a^{20} + a^{21} \\
& +53745962882620608893167875b + 45053743668222224004344100ab \\
& +113826458136107026075141710a^2b + 32581896347358559999317420a^3b \\
& +22213537883171068151439531a^4b + 3437881821120782582829456a^5b \\
& +1069513403791665845357128a^6b + 102017962030642073210480a^7b \\
& +17605238308074264053574a^8b + 1094032303287108057912a^9b + 114934366191849037236a^{10}b \\
& +4742709531308534760a^{11}b + 317038686494337262a^{12}b + 8612153544899408a^{13}b \\
& +370669544999304a^{14}b + 6357587526960a^{15}b + 172733256855a^{16}b + 1689533124a^{17}b \\
& +27096622a^{18}b + 114380a^{19}b + 903a^{20}b - 3418740929846540363004450b^2 \\
& +152628207170808204647275770ab^2 + 29662057538012999895338574a^2b^2 \\
& +73924679489058918046015938a^3b^2 + 9095261732430392323657176a^4b^2 \\
& +6475045382105375335889480a^5b^2 + 523071699408050859929016a^6b^2 \\
& +171242942351303632910536a^7b^2 + 9336842670271654008484a^8b^2 \\
& +1689474770765990596076a^9b^2 + 62588562419040481252a^{10}b^2 + 6843044908448608444a^{11}b^2 \\
& +169609751776172344a^{12}b^2 + 11684556963374568a^{13}b^2 + 185095028637272a^{14}b^2 \\
& +8105951624872a^{15}b^2 + 73945230446a^{16}b^2 + 2006403306a^{17}b^2 + 7972286a^{18}b^2 + 123410a^{19}b^2 \\
& +49302844553810665888575930b^3 - 5196235439832751151572788ab^3 \\
& +91735804724807821121609526a^2b^3 + 6747725269089701729734368a^3b^3 \\
& +16438427349229328982545896a^4b^3 + 1038876114726270005445776a^5b^3 \\
& +735240415476876038312632a^6b^3 + 34241820697597088722848a^7b^3 \\
& +11226186945118492939852a^8b^3 + 371078402291905961224a^9b^3 + 67240314521518855860a^{10}b^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +1526743180734652192a^{11}b^3 + 166445736776215624a^{12}b^3 + 2459287660143888a^{13}b^3 \\
& +167607787407128a^{14}b^3 + 1445744454752a^{15}b^3 + 61843300298a^{16}b^3 + 235148940a^{17}b^3 \\
& +6096454a^{18}b^3 - 6523406582853698567485227b^4 + 43689757687398414790547553ab^4 \\
& -1858191737565276546672360a^2b^4 + 19566549200385431103972216a^3b^4 \\
& +673581690360746582755756a^4b^4 + 1596002262124887064872892a^5b^4 \\
& +56864612882774626831720a^6b^4 + 39096473046294723020936a^7b^4 \\
& +1099649665242617000798a^8b^4 + 352022359346404662630a^9b^4 + 7157179769538448936a^{10}b^4 \\
& +1266877992724507592a^{11}b^4 + 17271058034689004a^{12}b^4 + 1832663509135228a^{13}b^4 \\
& +14882731838680a^{14}b^4 + 979484169144a^{15}b^4 + 3560764597a^{16}b^4 + 145008513a^{17}b^4 \\
& +6412982275781442369534447b^5 - 3020391903873160874624880ab^5 \\
& +11072544506717425040943320a^2b^5 - 251409502832929940580848a^3b^5 \\
& +1850900598832213039588308a^4b^5 + 33362183528683696143184a^5b^5 \\
& +76635144078132798484872a^6b^5 + 1614107103242780383952a^7b^5 + 1064600574662833613834a^8b^5 \\
& +18285405023328014000a^9b^5 + 5631584078513951272a^{10}b^5 + 68669517587706672a^{11}b^5 \\
& +11692563911936180a^{12}b^5 + 87796234586480a^{13}b^5 + 8925930851320a^{14}b^5 + 30677356528a^{15}b^5 \\
& +1917334783a^{16}b^5 - 604573745934401191005912b^6 + 2761535361221837965136664ab^6 \\
& -446409836411046907751368a^2b^6 + 1155941471891438860601896a^3b^6 \\
& -15624214876016679739352a^4b^6 + 87313680148565150111832a^5b^6 + 874649607643712372472a^6b^6 \\
& +1943115716512939776808a^7b^6 + 24520882366446890424a^8b^6 + 15396021766853800072a^9b^6 \\
& +157355447527654376a^{10}b^6 + 46179770718580408a^{11}b^6 + 309271965286648a^{12}b^6 \\
& +50125620668424a^{13}b^6 + 159286274280a^{14}b^6 + 15338678264a^{15}b^6 + 231724339078175706150136b^7 \\
& -153811376527605888117264ab^7 + 374921775760059309890200a^2b^7 \\
& -28831347254232216398432a^3b^7 + 58118545317700335413400a^4b^7 - 490468210861184892336a^5b^7 \\
& +2185851421255096595000a^6b^7 + 12438236313336433600a^7b^7 + 26672527585599011688a^8b^7 \\
& +196990298922392976a^9b^7 + 117137843987075912a^{10}b^7 + 652631982303392a^{11}b^7 \\
& +181277011099912a^{12}b^7 + 512075874352a^{13}b^7 + 78378960360a^{14}b^7 - 15128932813380875312110b^8 \\
& +56881481026993911310578ab^8 - 13039358045721374943420a^2b^8 + 22139104917821671572676a^3b^8 \\
& -921471943096864139266a^4b^8 + 1520878767836758616286a^5b^8 - 8095043487442343432a^6b^8 \\
& +29720901376476436984a^7b^8 + 94427080896983406a^8b^8 + 195113449113625614a^9b^8 \\
& +774287072717444a^{10}b^8 + 434411052282116a^{11}b^8 + 1013931747010a^{12}b^8 + 265182149218a^{13}b^8 \\
& +3024008960876320420246b^9 - 2332408473401733698504ab^9 + 4569477008635213654148a^2b^9 \\
& -492678254183696354488a^3b^9 + 645945537218444676642a^4b^9 - 15329149883995675728a^5b^9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +21357540300644860312a^6b^9 - 69758491996612848a^7b^9 + 215842089833789562a^8b^9 \\
& +353214178214040a^9b^9 + 702101231167908a^{10}b^9 + 1152680301864a^{11}b^9 + 608359048206a^{12}b^9 \\
& -137104871154095942604b^{10} + 454222013907202843900ab^{10} - 120615054891875887772a^2b^{10} \\
& +161949836634482706524a^3b^{10} - 9180121926490903960a^4b^{10} + 9807216639522886584a^5b^{10} \\
& -132405723186144408a^6b^{10} + 158910354362756568a^7b^{10} - 291326223911580a^8b^{10} \\
& +772341543530700a^9b^{10} + 503154100020a^{10}b^{10} + 960566918220a^{11}b^{10} + 16116280063842269532b^{11} \\
& -13266524009934170456ab^{11} + 22468630494292536788a^2b^{11} - 2744654110430536928a^3b^{11} \\
& +2812829209563463896a^4b^{11} - 85999358210064208a^5b^{11} + 77331167721172456a^6b^{11} \\
& -552383916933472a^7b^{11} + 579276741224844a^8b^{11} - 457412818200a^9b^{11} + 1052049481860a^{10}b^{11} \\
& -504464808447965118b^{12} + 1520074513892383306ab^{12} - 422390481555014024a^2b^{12} \\
& +483431815242444952a^3b^{12} - 29546096072985492a^4b^{12} + 24458385708121820a^5b^{12} \\
& -381004267695688a^6b^{12} + 294616546783832a^7b^{12} - 864510226398a^8b^{12} + 800472431850a^9b^{12} \\
& +36842919196739110b^{13} - 30556991340393392ab^{13} + 46327319945209016a^2b^{13} \\
& -5648934122340208a^3b^{13} + 4881179381635732a^4b^{13} - 144878605202576a^5b^{13} \\
& +100261443987096a^6b^{13} - 623957998160a^7b^{13} + 421171648758a^8b^{13} - 777692306266456b^{14} \\
& +2164283489573848ab^{14} - 578915870956584a^2b^{14} + 585771144020552a^3b^{14} \\
& -32252520795880a^4b^{14} + 22313057280808a^5b^{14} - 256037937176a^6b^{14} + 151532656696a^7b^{14} \\
& +35857948972408b^{15} - 28280942023504ab^{15} + 39037774410808a^2b^{15} - 4143128700320a^3b^{15} \\
& +3132630060840a^4b^{15} - 63714509712a^5b^{15} + 36576848168a^6b^{15} - 484185248451b^{16} \\
& +1250881854197ab^{16} - 288251667106a^2b^{16} + 262400960302a^3b^{16} - 9586673915a^4b^{16} \\
& +5752004349a^5b^{16} + 13811946279b^{17} - 9489432124ab^{17} + 11986499486a^2b^{17} - 837826964a^3b^{17} \\
& +563921995a^4b^{17} - 106564578b^{18} + 254376218ab^{18} - 39191490a^2b^{18} + 32224114a^3b^{18} \\
& +1743994b^{19} - 839188ab^{19} + 962598a^2b^{19} - 5719b^{20} + 12341ab^{20} + 43b^{21} \Big) \Big] \quad (8)
\end{aligned}$$

III. DERIVATION OF THE SUMMATION FORMULA

Substituting $c = \frac{a+b+45}{2}$ and $z = \frac{1}{2}$ in equation (2), we get

$$(a-b) {}_2F_1 \left[\begin{matrix} a, b \\ \frac{a+b+45}{2} \end{matrix} ; \frac{1}{2} \right] = a {}_2F_1 \left[\begin{matrix} a+1, b \\ \frac{a+b+45}{2} \end{matrix} ; \frac{1}{2} \right] - b {}_2F_1 \left[\begin{matrix} a, b+1 \\ \frac{a+b+45}{2} \end{matrix} ; \frac{1}{2} \right]$$

Now involving the formula [Salahuddin et. al. p.12-41(8)], the summation formula is obtained.

REFERENCES RÉFÉRENCES REFERENCIAS

1. Andrews, L.C.(1992) ; *Special Function of Mathematics for Engineers,second Edition*, McGraw-Hill Co Inc., New York.

2. Arora, Asish, Singh, Rahul , Salahuddin. ; Development of a family of summation formulae of half argument using Gauss and Bailey theorems , *Journal of Rajasthan Academy of Physical Sciences.*, 7(2008), 335-342.
3. Prudnikov, A. P., Brychkov, Yu. A. and Marichev, O.I.; *Integrals and Series Vol. 3: More Special Functions.* Nauka, Moscow, 1986. Translated from the Russian by G.G. Gould, Gordon and Breach Science Publishers, New York, Philadelphia, London, Paris, Montreux, Tokyo, Melbourne, 1990.
4. Rainville, E. D.; The contiguous function relations for ${}_pF_q$ with applications to Bateman's $J_n^{u,v}$ and Rice's $H_n(\zeta, p, \nu)$, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 51(1945), 714-723.
5. Salahuddin ,Chaudhary, M. P.,Kumar,Vinesh ; A summation formula of half argument collocated with contiguous relation , *Global Journal of Science Frontier Research*, 1(2012),11-41.

This page is intentionally left blank